

Câu trắc nghiệm đúng sai.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'		-	-	0	+
y	2		$+\infty$		$+\infty$
				2	
					$-\infty$

- a) $f(-5) < f(4)$
- b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2
- c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$
- d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

Lời giải

- a) Đúng: Từ bảng biến thiên ta thấy $f(-5) < 2$ và $f(4) > 2$ nên $f(-5) < f(4)$
- b) Sai: Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên hàm số có không có giá trị nhỏ nhất.
- c) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$
- d) Sai: Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5 - 4x}{2x + 3}$ có đồ thị là (C)

- a) Hàm số đã cho không có cực trị
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$
- c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$
- d) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

- $\lim_{x \rightarrow -\left(\frac{3}{2}\right)^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\left(\frac{3}{2}\right)^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{3}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$

Diện tích hình chữ nhật cần tìm là $S = \left| -\frac{3}{2} \right| \cdot |2| = 3$ (đvdt)

- a) Đúng: Hàm số đã cho không có cực trị
- b) Sai: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{3}{2}$
- c) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$
- d) Đúng: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}$ có đồ thị là (C)

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$

Bài Toán Tìm Tiệm Cận của đồ thị Hàm Số

- b) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang, trong đó có một đường là đường thẳng có phương trình $y = -1$.
- c) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$
- d) Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

b) Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = -1$ nên hàm số chỉ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

c) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{x+2} = -\frac{1}{4}$

• $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{2-x} = -\infty$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) Sai: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 2

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	3		$+\infty$	5
	↘		↘ ↗	
	$-\infty$		-2	

- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$
- b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận đứng là $x = 1$
- c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 3$
- d) Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng

Lời giải

a) Sai: Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (1; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

b) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = 1$

c) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 3$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 3$

d) Đúng: Dựa vào đồ thị, ta có $f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = x_0 \in (-\infty; 1) \end{cases}$

Hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x)+2}$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{x_0; 1; 2\}$.

Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định của nó.

Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)+2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)+2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)+2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)+2} = +\infty$.

Vậy hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = x_0$ và $x = 2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$. Tính giá trị biểu thức $a - 2b$

Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là: $x = \frac{2}{b}$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là: $y = \frac{a}{b}$.

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} \frac{2}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - 2b = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Câu 2: Gọi $I(a;b)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$.

Tính $T = a + b$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

• $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \end{cases}$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Vậy giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là điểm $I(-2;1)$ nên $T = -2 + 1 = -1$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^3 - 9x}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$ có đồ thị là (C) . Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ và có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang

• $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng

• $\lim_{x \rightarrow 3} y = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+3)}{(x+1)^2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ nên đường thẳng $x = 3$ không là tiệm cận đứng.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là 2.

Câu 4: Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+3}$ và các trục tọa độ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Bài Toán Tìm Tiệm Cận của đồ thị Hàm Số

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $x = -3$;

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2$.

Hai đường tiệm cận tạo với các trục tọa độ một hình chữ nhật có chiều dài bằng 3, chiều rộng bằng 2.

Diện tích hình chữ nhật: $S = 2.3 = 6$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Tính giá trị biểu thức $a^2 + b^2$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, suy ra đường tiệm cận đứng là: $x = 2$ và đường tiệm cận ngang là: $y = 1$.

Từ hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là: $x = -b$ và đường tiệm cận ngang là: $y = a$.

$$\text{Do đó ta có: } \begin{cases} -b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tính các khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc (C) đến hai đường tiệm cận bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $\Delta_1 : x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

Đường tiệm cận ngang là $\Delta_2 : y = 2 \Leftrightarrow y - 2 = 0$.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0+1}\right) \in (C), x_0 \neq -1$.

$$\text{Ta có: } d(M; \Delta_1) = |x_0 + 1| \text{ và } d(M; \Delta_2) = \left| \frac{2x_0-1}{x_0+1} - 2 \right| = \frac{3}{|x_0+1|}.$$

$$\text{Suy ra } d(M; \Delta_1) \cdot d(M; \Delta_2) = |x_0 + 1| \cdot \frac{3}{|x_0 + 1|} = 3.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và đường tiệm cận đứng $x = 1$. Khi đó:

Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận ngang là: $|b-2| = \left| \frac{2a-1}{a-1} - 2 \right| = \frac{1}{|a-1|}$ (do $M \in (C)$)

Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận đứng là: $|a-1|$.

Ta có $|a-1| + \frac{1}{|a-1|} \geq 2\sqrt{|a-1| \cdot \frac{1}{|a-1|}} = 2$.

Vậy tổng khoảng cách nhỏ nhất là 2 khi $|a-1| = \frac{1}{|a-1|}$.

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3 \Rightarrow a + 2b = 8.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{2x-3}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng 10 lần khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng.

Lời giải

Ta có các đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ và $y = 1$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số mà $M \in (C) \Rightarrow M\left(x; \frac{2x+2}{2x-3}\right)$ với $x \neq \frac{3}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{|2x-3|}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng $\left|\frac{2x+2}{2x-3} - 1\right| = \frac{5}{|2x-3|}$.

$$\text{Khi đó: } \frac{5}{|2x-3|} = 10 \cdot \frac{|2x-3|}{2} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 6) \\ M(1; -4) \end{cases}.$$

Câu 9: Cho đồ thị hai hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ và $g(x) = \frac{ax+1}{x-2}$, $a \neq -\frac{1}{2}$. Tìm giá trị thực dương của a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

Lời giải

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ có hai đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = 1$.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{ax+1}{x-2}$ có hai đường tiệm cận là $x = 2$ và $y = a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước lần lượt là 1 và $|a-1|$.

Theo giả thiết, ta có $|a-1|.1=4 \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ a=-3 \end{cases}$. Vì $a > 0$ nên chọn $a = 5$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9}$ có đồ thị (C) và a, b là các hằng số dương thỏa mãn $a.b = 4$. Biết rằng (C) có đường tiệm cận ngang $y = c$ và có đúng 1 đường tiệm cận đứng. Tính tổng $T = 3a + b - 24c$.

Lời giải

Theo giả thiết $a > 0, b > 0$.

$$\text{Với } ab = 4 \text{ ta có } y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9} = \frac{\frac{4}{b}x^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9} = \frac{4x^2 + bx - b}{b(4x^2 + bx + 9)} = \frac{1}{b} - \frac{b+9}{b(4x^2 + bx + 9)}.$$

Đồ thị (C) có đúng 1 đường tiệm cận đứng nên $4x^2 + bx + 9 = 0$ có nghiệm kép

Suy ra $\Delta = b^2 - 4.4.9 = 0 \Leftrightarrow b = 12$ (do $b > 0$).

$$\text{Ta có } ab = 4 \text{ suy ra } a = \frac{1}{3}; c = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{b}{x} + \frac{9}{x^2}} = \frac{a}{4} \text{ suy ra } c = \frac{1}{12}.$$

Vậy $T = 3a + b - 24c = 11$.