**Dạng nâng cao: TRẮC NGHIỆM TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ CHỨA THAM SỐ**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Giá trị $m$ để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2m-1}{x+m}$ đi qua điểm $M(3;1)$ là

**A.** $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

**Lời giải**

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3;1)$ nên đồ thị hàm có tiệm cận đứng là $x=3$

Suy ra $x+m=0$ có nghiệm là $3$ do vậy $3+m=0\Leftrightarrow m=-3$.

Thử lại, với $m=-3\Rightarrow y=\dfrac{2x-7}{x-3}$ có $\lim\limits_{x\to 3^+}y=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-7}{x-3}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-}y=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-7}{x-3}=+\infty$.

Vậy $m=-3$.

**Câu 2:** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

**A.** $m>-2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m<-2$. **D.** $m\neq -2$.

**Lời giải**

Để $x=m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{2x+4}{x-m}$ thì $\begin{cases} v(m)=0\\ u(m)\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-m=0\\ 2m+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 0=0\\ m\neq -2\end{cases}\Rightarrow m\neq -2$$

**Câu 3:** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $[-2025;2025]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung là

**A.** $2020$. **B.** $2025$. **C.** $4041$. **D.** $4042$.

**Lời giải**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=m$ nằm bên trái trục tung $\Leftrightarrow m<0$
.

$$\begin{cases} m\in[-2025;2025]\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{-2025;-2020;...;-1\}.$$

Vậy có $2025$ giá trị nguyên của $m$ thoả mãn yêu cầu.

**Câu 4:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

**A.** 19. **B.** 15. **C.** **16.** **D.** 17.

**Lời giải**

Ta có đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $x^2+4x-m-3$

có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^2-(-m-3)>0 \\ 1^2+4.1-m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-7 \\ m\neq 2 \end{cases}$

Từ đó ta suy ra $m=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 5:** Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Giá trị $m+n$ là

**A.** $8$. **B.** $9$. **C.** $6$. **D.** $-6$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x^2+mx+n-6\neq 0$.

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=2m-n$.

Vì đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên $2m-n=0$.

Đặt $f(x)=(2m-n)x^2+mx+1$ và $g(x)=x^2+mx+n-6$.

Vì $f(0)\neq 0$ với mọi $m$, $n$ nên đồ thị nhận trục tung $x=0$ là tiệm cận đứng khi $g(0)=0 \Leftrightarrow n=6$. Suy ra $m=\dfrac{n}{2}=3$. Vậy $m+n=9$.

**Câu 6:** Số giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-2x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận.

**A.** $5$. **B.** Vô số. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Lời giải**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-2x+m}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-2x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2-2x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ lớn hơn hoặc bằng $-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ (x_1+1)(x_2+1)\geq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m+2+1>0 \\ 4>0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.

**Câu 7:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx-m-2}$. Biết với $m=\dfrac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{N}$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=7$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=6$.

**Lời giải**

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì hoặc phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ có nghiệm kép $x=2$ hoặc phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ phải có hai nghiệm (một nghiệm $x_1=2$ và một nghiệm $x_2\neq 2$).

Do $\Delta'=m^2+m+2>0,\forall m$ nên ta chỉ xét trường hợp thứ hai phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt. Thay $x=2$ vào phương trình ta được $m=\frac{2}{5}$ (thỏa mãn).

Vậy $a=2,b=5,a+b=7$.

**Câu 8:** Có bao nhiêu giá trị của tham số để đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 tiệm cận?

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{m-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=m\Rightarrow y=m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 tiệm cận $\Leftrightarrow y=\frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng. Ta có: $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m.1^2-1=0\\m.2^2-1=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{1}{4}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị tham số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 9:** Cho hàm số $y=\frac{x-2}{mx^2-2(m-1)x+m-2}$ có đồ thị $(C_m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để $(C_m)$ có đúng 2 đường tiệm cận?

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Trường hợp 1:** $m=0$, ta được hàm số $y=\frac{x-2}{2x-2}$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$; tiệm cận ngang $y=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

**Trường hợp 2:** $m\neq0$, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình: $mx^2-2(m-1)x+m-2=0\,(m\neq0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{m-2}{m}\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số $(C_m)$ có đúng 2 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $(C_m)$ chỉ có 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow mx^2-2(m-1)x+m-2=0$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2 hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{m-2}{m}=2\\\frac{m-2}{m}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 10:** Cho đường cong $(C):y=\frac{x+a}{x-1}$. Biết điểm $M$ thuộc $(C)$. Tính tổng các giá trị của tham số $a$ để tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ tạo với hai đường tiệm cận của $(C)$ một tam giác có diện tích bằng

$3\sqrt{2}+2$.

**A.** $3\sqrt{2}-2$. **B.** $6$. **C.** $-2$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

**Lời giải**

Tiệm cận đứng $x=1$; tiệm cận ngang $y=1$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{-1-a}{(x-1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M$ của $(C)$ là $(d): y=\dfrac{-1-a}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+a}{x_0-1}$

Giao điểm của $(d)$ với tiệm cận đứng: $A\left(1;\dfrac{x_0+2a+1}{x_0-1}\right)$

Giao điểm của $(d)$ với tiệm cận ngang: $B(2x_0-1;1)$

Giao hai đường tiệm cận của $(C)$: $I(1;1)$. Khi đó: $IA=\left|\dfrac{2a+2}{x_0-1}\right|$; $IB=2|x_0-1|$.

Ta có: $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=|2a+2|=3\sqrt{2}+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ a=\dfrac{-3\sqrt{2}-4}{2}\end{array}\right.$

Vậy tổng cần tìm là $-2$.

**Câu 11:** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ m>0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m< -5 \\ m>-1\end{array}\right.$. **C.** $-5\le m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m>-1\end{array}\right.$.

**Lời giải**

Đặt $f(x)=x^3+3x^2+m+1$; $f'(x)=3x^2+6x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0\end{array}\right.$

**Trường hợp 1:** $g(1)=0 \Rightarrow 1+3+m+1=0 \Leftrightarrow m=-5$.

Khi đó $g(x)=x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$

$\Rightarrow y=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{1}{9}$;

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^+} y=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^-} y=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2}=+\infty$

Nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng $x=-2$.

**Trường hợp 2:** $g(1)\ne 0 \Rightarrow 1+3+m+1\ne 0 \Leftrightarrow m\ne -5$.

Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng khi phương trình $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow g(0).g(-2)>0 \Leftrightarrow (m+1)(m+5)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>-1 \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp ta có những giá trị $m$ cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m>-1 \end{array}\right.$.

**Câu 12:** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}$ (1), $m$ là tham số thực. Tìm giá trị của $m$ để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

**A.** $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm 3$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm 1$.

**Lời giải**

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}=-x-m+\dfrac{m^2-m+1}{1-x}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta: y=-x-m$.

Tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0;-m)$ và $B(-m;0)$.

Diện tích tam giác $OAB$ là $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}|y_A|.|y_B|=\dfrac{1}{2}m^2$.

Theo giả thiết $S=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $m=\pm 1$.

**Câu 13:** Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng $5$.

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $0$. **D.** $5$.

**Lời giải**

Xét hàm nhất biến $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có tiệm cận đứng $x=m$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Để hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng $5$ khi và chỉ khi: $|m|.1=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-5 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị $m$ thỏa mãn và tổng chúng bằng $0$.